ST1-Tutorübung – Lösung zu Blatt 4

1. Stromteiler

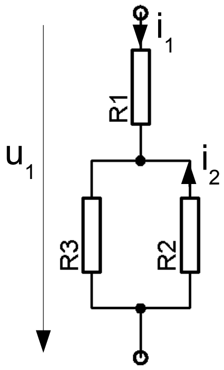
$$G_1 := \frac{1}{R_1} = \frac{1}{250\,\Omega} = 4\,mS\,; \qquad G_2 := \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1\,k\,\Omega} = 1\,mS$$

$$\frac{i_1}{G_1} = \frac{I_0}{G_1+G_2} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2}\cdot I_0 = \frac{4\text{mS}}{5\text{mS}}\cdot 5\text{A} = 4\text{A}$$

2. Beschreibungsformen und Eigenschaften linearer Zweitore

a)

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}\cdot\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} i_1 + h_{12} u_2 \\ h_{21} i_1 + h_{22} u_2 \end{pmatrix}$$

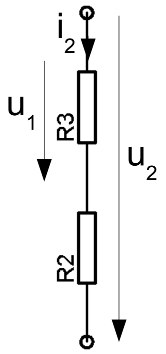


$u_2 = 0$:

$$u_1 = (R_1 + (R_2 \| R_3))\cdot i_1 = \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}\right)\cdot i_1 \quad \Rightarrow \quad h_{11} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}$$

Mit Stromteilerformel:

$$i_2 = -\frac{1/R_2}{1/R_2 + 1/R_3}\cdot i_1 = -\frac{R_3}{R_2+R_3}\cdot i_1 \quad \Rightarrow \quad h_{21} = -\frac{R_3}{R_2+R_3}$$



$i_1 = 0$:

$$u_1 = u_{R3} = \frac{R_3}{R_2+R_3}\cdot u_2 \quad \Rightarrow \quad h_{12} = \frac{R_3}{R_2+R_3}$$

$$i_2 = \frac{u_1}{R_3} = \frac{1}{R_2+R_3} u_2 \quad \Rightarrow \quad h_{22} = \frac{1}{R_2+R_3}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_2+R_3} \\ -\frac{R_3}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{R_3}{R_2+R_3} & R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2+R_3} & -\frac{R_3}{R_2+R_3} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

c)

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0\,\Omega & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{25}S \end{pmatrix}$$

d) siehe Umrechnungsformeln Skript S. 55
Leitwertsmatrix $\boldsymbol{G}$ existiert nicht weil h_{11}=0

Widerstandsmatrix $\boldsymbol{R}=\frac{1}{h_{22}}\begin{pmatrix} det\,\boldsymbol{H} & h_{12} \\ -h21 & 1 \end{pmatrix}=25\,\Omega\begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16\,\Omega & 20\,\Omega \\ 20\,\Omega & 25\,\Omega \end{pmatrix}$

e)

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\,A \\ 1\,V \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8\,V \\ 0{,}04\,A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\,A \\ 0\,V \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\,V \\ -0{,}8\,A \end{pmatrix}$$

$$N=\left\{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8\,V & 0\,V \\ 1\,V & 0\,V \\ 0\,A & 1\,A \\ 0{,}04\,A & -0{,}8\,A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

f)

- stromgesteuert (**R** existiert)
- nicht spannungsgesteuert (**G** existiert nicht)
- quellenfrei ($(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \in N$)
- nicht zeitvariant (kein zeitvariantes Bauteil enthalten)
- streng linear (besteht nur aus streng linearen Bauteilen)
- nicht verlustfrei (**R** nicht schiefsymmetrisch)
- nicht umkehrbar ($\boldsymbol{P\,R\,P} \neq \boldsymbol{R}$)
- reziprok (**R** symmetrisch)

g)

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}^T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}^T\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{i}=(i_1 \quad i_2)\cdot\begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}\Omega\cdot\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=(i_1 \quad i_2)\cdot\begin{pmatrix} 16\,i_1+20\,i_2 \\ 20\,i_1+25\,i_2 \end{pmatrix}\Omega$$

$$=(16\,i_1^2+20\,i_1\,i_2+20\,i_1\,i_2+25\,i_2^2)\,\Omega=(16\,i_1^2+40\,i_1\,i_2+25\,i_2^2)\,\Omega=(4\,i_1+5\,i_2)^2\,\Omega\geq 0\;\forall\,\boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{i}=u_1\,i_1+u_2\,i_2$ entspricht der Summe der Leistung an beiden Toren. Diese ist für alle $\boldsymbol{i}$ größer oder gleich Null, weil der quadratische Ausdruck $(4\,i_1+5\,i_2)^2$ niemals negativ ist. Das Zweitor ist also passiv.
Die Passivität ist *nicht* direkt aus der Schaltung ersichtlich, wäre zum Beispiel der Wert des negativen Widerstandes betragsmäßig größer, wäre sie nicht mehr gegeben. Die Rechnung ist also notwendig.