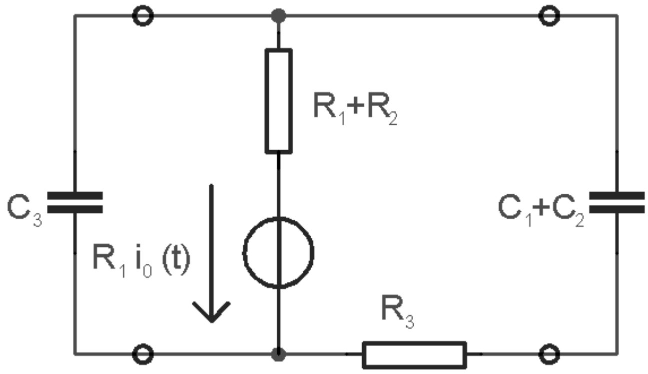
ST2-TUTORÜBUNG – LÖSUNG ZU BLATT 4

1. Schaltung zweiten Grades

a) C_1 und C_2 sind voneinander linear abhängig und können durch $C_{12} = C_1 + C_2$ substituiert werden.

b)



c) Zwei Kapazitäten ⇒ Leitwertsbeschreibung des Zweitores geeignet

$u_2=0:\;\; i_1=\frac{u_1}{(R_1+R_2)\|R_3};\;\; i_2=-\frac{u_1}{R_3}$

$u_1=0:\;\; i_1=-\frac{u_2}{R_3};\;\; i_2=\frac{u_2}{R_3}$

Quellen: $u_1=u_2=0:\;\; i_1=-\frac{R_1}{R_1+R_2}i_0(t);\;\; i_2=0$

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{i_0}=\begin{pmatrix}\frac{1}{(R_1+R_2)\|R_3} & -\frac{1}{R_3}\\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{pmatrix}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\\ 0\end{pmatrix}i_0(t)=\begin{pmatrix}\frac{5}{6R} & -\frac{1}{3R}\\ -\frac{1}{3R} & \frac{1}{3R}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}i_0(t)$$

d) $$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{C_3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{C_1+C_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2C} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2C}\end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\,v=\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{t}\,v=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2C} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{6R} & -\frac{1}{3R}\\ -\frac{1}{3R} & \frac{1}{3R}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2C} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}v(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{12RC} & \frac{1}{6RC}\\ \frac{1}{6RC} & -\frac{1}{6RC}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4C}\\ 0\end{pmatrix}v(t)\quad\text{mit}\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}u_{C3}\\ u_{C12}\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad v(t)=i_0(t)=I_0=2\,mA$$

e) $\frac{1}{4C}=\frac{3}{mF}\;\Rightarrow\; C=\frac{1}{12}mF$

$\frac{4}{s}=\frac{1}{6RC}=\frac{12}{6\,mF\cdot R}\;\Rightarrow\; R=\frac{12s}{6\cdot 4\cdot 10^{-3}S\cdot s}=\frac{1}{2\,mS}=\frac{1}{2}k\,\Omega=500\,\Omega$

f) $\boldsymbol{x}(t)$ in V, $v(t)$ in A

g) $0=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_\infty+\boldsymbol{b}\,I_0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}_\infty=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\,I_0$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{(40\,s^{-2}-16\,s^{-2})}\begin{pmatrix}-4\,s^{-1} & -4\,s^{-1}\\ -4\,s^{-1} & -10\,s^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{12}\end{pmatrix}s$$

$$\boldsymbol{x}_\infty=-\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\,s\cdot\frac{3}{mF}\cdot I_0\\ \frac{1}{6}\,s\cdot\frac{3}{mF}\cdot I_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\,k\Omega\cdot 2\,mA\\ 0{,}5\,k\Omega\cdot 2\,mA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1V\\ 1V\end{pmatrix}$$

h) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\infty$

i)

$$\lambda_{1,2}=\frac{sp(\boldsymbol{A})}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{sp(\boldsymbol{A})}{2}\right)^2-det\,\boldsymbol{A}}=-\frac{14\,s^{-1}}{2}\pm\sqrt{7^2\,s^{-2}-(40\,s^{-2}-16\,s^{-2})}=7\,s^{-1}\pm\sqrt{25\,s^{-2}}=\begin{cases}-2\,s^{-1}\\ -12\,s^{-1}\end{cases}$$

j) Ja, weil alle Eigenwerte einen Realteil < 0 haben.
oder: Ja, weil die Schaltung nur aus streng linearen Widerständen und Kapazitäten mit jeweils positiven Bauteilwerten und aus Quellen besteht.

k) $\xi=(\boldsymbol{q_1}\quad\boldsymbol{q_2})^{-1}\boldsymbol{x}'=(\boldsymbol{q_1}\quad\boldsymbol{q_2})^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\infty)$ wobei $\boldsymbol{q_1}$ und $\boldsymbol{q_2}$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 sind.

l) $\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}s^{-1}$

$$\xi(t)=e^{\Lambda t}\xi_0=\begin{pmatrix}e^{\frac{-2t}{s}}\xi_{01}\\ e^{\frac{-12t}{s}}\xi_{02}\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad \xi_0=(\boldsymbol{q_1}\quad\boldsymbol{q_2})^{-1}(\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{x}_\infty)$$

m) Zwei Freiheitsgrade, nämlich die beiden Komponenten von ξ_0 bzw. $\boldsymbol{x_0}$.
Diese werden durch die Anfangszustände der drei Kapazitäten C_1, C_2 und C_3 festgelegt.