ST2-Tutorübung – Lösung zu Blatt 6

1. Strudel und Wirbel in linearen Systemen zweiten Grades

a) Durch den Nullator fließt kein Strom zwischen den beiden Teilen. Es muss zwar auf beiden Seiten des Nullators die gleiche Spannung herrschen, aber da sich der Norator auf der rechten Seite befindet, passt sich diese an die linke an und nicht umgekehrt. Somit ist der linke Teil sowohl strom- als auch spannungsmäßig unabhängig vom Rest.

b)
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}' \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u_C \\ -i_L \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2S - g & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\mathrm{s}^{-1} + \frac{g}{C} & \frac{3}{10F} \\ -\frac{3}{5H} & -\frac{2}{5}s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_0}{C} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\,Vs^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1\mathrm{s}^{-1} + \frac{g}{C} & \frac{3}{10F} \\ -\frac{3}{5H} & -\frac{2}{5}s^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0{,}5\,Vs^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $y = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + d\,v$

hier: $$y = i_{R_L} = \frac{u_{R_L}}{R_L} = \frac{u_2}{R_L} = \frac{\frac{3}{5}u_1 + \frac{2}{5}\Omega i_2}{R_L} = \frac{3}{5R_L}u_C + \frac{2\Omega}{5R_L}(-i_L) + 0\cdot I_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5R_L} & \frac{2\Omega}{5R_L} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 0\cdot v$$

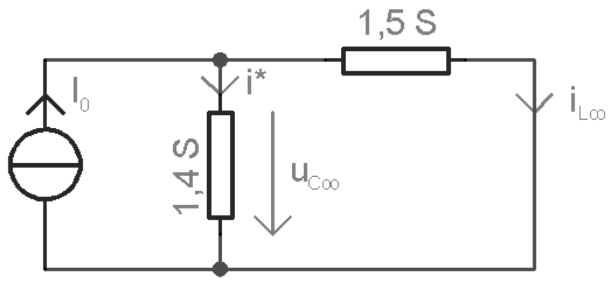
$$\boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5R_L} & \frac{2\Omega}{5R_L} \end{pmatrix}; \quad d = 0$$

e) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\infty$

Für Fixpunkt setze $C \rightarrow LL$, $L \rightarrow KS$

$$i_{L\infty} = \frac{1{,}5}{1{,}4+1{,}5} I_0 = \frac{15}{29} A$$

$$u_{C\infty} = \frac{i^*}{1{,}4\,S} = \frac{1{,}4\,I_0}{(1{,}4+1{,}5)} \frac{1}{1{,}4\,S} = \frac{I_0}{2{,}9\,S} = \frac{10}{29} V$$



f) $$\lambda_{1/2} = -\frac{7}{10}s^{-1} \pm \sqrt{\frac{49}{100}s^{-2} - \frac{29}{50}s^{-2}} = -0{,}7\,s^{-1} \pm \sqrt{-\frac{9}{100}s^{-2}} = -0{,}7\,s^{-1} \pm j\cdot 0{,}3\,s^{-1}$$

komplexe Eigenwerte $\Rightarrow$ reellwertige Normalform geeignet

g) $\lambda=\lambda_1=-0{,}7\,s^{-1}+j\cdot 0{,}3\,s^{-1};\ \ \lambda_2=\lambda^*$

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-a_{21}\\ a_{11}-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}3\,F^{-1}\\ -1\,s^{-1}+0{,}7\,s^{-1}-j\cdot 0{,}3\,s^{-1}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1\,V\\ -1\,A-j\cdot 1\,A\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{q_r}=\begin{pmatrix}-1\,V\\ -1\,A\end{pmatrix};\quad -\boldsymbol{q_i}=\begin{pmatrix}0\\ 1\mathrm{A}\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{Q}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q_r} & -\boldsymbol{q_i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\,V & 0\\ -1\,A & 1\,A\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}'=\boldsymbol{Q}'^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}'=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}7 & -0{,}3\\ 0{,}3 & -0{,}7\end{pmatrix}s^{-1}\qquad \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\xi}}'=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\xi}'$$

h) $$\boldsymbol{\xi}'(t)=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\xi'_{01}\cos(\beta t)-\xi'_{02}\sin(\beta t)\\ \xi'_{02}\cos(\beta t)+\xi'_{01}\sin(\beta t)\end{pmatrix}$$ (Skript S. 49)

i)

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}_\infty=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\xi}'+\boldsymbol{x}_\infty=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q_r} & -\boldsymbol{q_i}\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}'+\boldsymbol{x}_\infty$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\alpha t}[(\xi'_{01}\cos(\beta t)-\xi'_{02}\sin(\beta t))\boldsymbol{q_r}-(\xi'_{02}\cos(\beta t)+\xi'_{01}\sin(\beta t))\boldsymbol{q_i}]+\boldsymbol{x}_\infty$$

mit $\begin{pmatrix}\xi'_{01}\\ \xi'_{02}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\xi}'_0=\boldsymbol{Q}'^{-1}(\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{x}_\infty)$

j) siehe Skizze
(asymptotisch) stabiler Strudel

k) für Wirbel: Komplexe Eigenwerte mit Realteil gleich Null

$$\lambda_{1/2}=\left(\frac{sp(\boldsymbol{A})}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{sp(\boldsymbol{A})}{2}\right)^2-det(\boldsymbol{A})}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda)\overset{!}{=}0\ \Rightarrow\ \frac{sp(\boldsymbol{A})}{2}=0\ \Rightarrow\ -1\,s^{-1}+\frac{g}{2\,F}-0{,}4\,s^{-1}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{g}{2\,F}=1{,}4\,s^{-1}\ \Rightarrow\ g=2\cdot 1{,}4\,Fs^{-1}=2{,}8\,S$$

$$det(\boldsymbol{A})\overset{!}{>}0\quad mit\ g=2{,}8\,S;\quad det(\boldsymbol{A})=\left(\frac{2}{5}s^{-1}\right)\left(-\frac{2}{5}s^{-1}\right)+\frac{9}{50}s^{-2}=\left(-\frac{8}{50}+\frac{9}{50}\right)s^{-2}>0\quad (ok)$$

l) *Realität:* Bauteile sind nicht ideal
$\Rightarrow$ Verluste $\Rightarrow$ verlässt die Kreisbahn, wird zum Strudel
Theorie & Realität: stabil, aber nicht asymptotisch stabil $\Rightarrow$ Trajektorie (diejenige Kreisbahn, die durchlaufen wird) hängt von den Startwerten (nicht von den Bauteilwerten) ab. Kleine Störeinflüsse führen zum Wechsel auf eine andere Trajektorie

zu j)