ST2-Tutorübung – Lösung zu Blatt 7

1. Nichtlineares System zweiten Grades

a) $i_C = i_L - i_R = i_L - \frac{u_R}{R} = i_L - \frac{1}{R} u_C$

b) $u_L = u_F - u_C = r_F(i_F) - u_C = r_F(-i_L) - u_C$
Das Eintor $\mathcal{F}$ muss stromgesteuert sein.

c) $\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} u_C + \frac{1}{C} i_L \\ -\frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} r_F(-i_L) \end{pmatrix}$

d) $\mathcal{F}$ müsste linear sein. (Strenge Linearität ist nicht notwendig, eventuelle Quellen würden sich in $\boldsymbol{Bv}$ ausdrücken.)

e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9x_1 + 9x_2 \\ -2x_1 - 2x_2^3 + 10x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$
$\Rightarrow 0 = -2x_2 - 2x_2^3 + 10x_2 = x_2(4 - x_2^2) = x_2(2 - x_2)(2 + x_2)$
Gleichgewichtspunkte: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -2 & -6x_2^2 + 10 \end{pmatrix}$

P_1: $\boldsymbol{J}\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-90 + 18)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{17}{2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases} \Rightarrow$ Sattelpunkt

P_2, P_3: $\boldsymbol{J}\big|_{(2,2)} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -2 & -14 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}\big|_{(-2,-2)}$

$\lambda_{1/2} = -\frac{23}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4} - (126 + 18)} = -\frac{23}{2} \pm \sqrt{\frac{529 - 576}{4}} = -\frac{23}{2} \pm \frac{\sqrt{47}}{2} j \Rightarrow$ stabiler Strudel

g) P_1: $\lambda_{1/2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{q_1} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9-9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \; \boldsymbol{q_2} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9+8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $m \to \infty \Rightarrow \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow -9x_1 + 9x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
$m = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -2x_1 - 2x_2^3 + 10x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2^3 + 5x_2$

i) siehe Skizze auf Seite 2

j) Separatrix: instabile Trajektorie, welche die Trennlinie zwischen den Einzugsbereichen von zwei Fixpunkten darstellt. (siehe Skizze auf Seite 2)

k) nur ein Fixpunkt $\hat{=}$ nur eine Lösung von $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9x_1+9x_2\\-2x_1+2\hat{r}_F(-x_2)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ -2x_2-2x_2^3+2a\,x_2=0\ \Rightarrow\ -x_2-x_2^3+a\,x_2=0\ \Rightarrow\ 0=x_2((a-1)-x_2^2)$

$x_2=0$ ist immer Lösung. Keine weitere Lösung für $(a-1)<0\ \Rightarrow\ a<1$

l) $\boldsymbol{J}|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}-9 & 9\\-2 & -6x_2^2\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}-9 & 9\\-2 & 0\end{pmatrix}$

$\lambda_{1/2}=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-18}=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{9}{2}\pm\frac{3}{2}=\begin{cases}-3\\-6\end{cases}$ $\Rightarrow$ stabiler Knoten

zu i) und j)