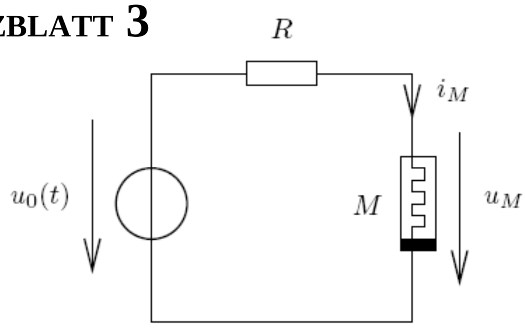
ST2-TUTORÜBUNG – ZUSATZBLATT 3



1. *Memristoren mit krummlinigen Kennlinien*

Gegeben sei nebenstehende Schaltung, mit der verschiedene Memristoren untersucht werden sollen.

*a) Bestimme i_M in Abhängigkeit von u_M, $u_0(t)$ und R.

Zunächst werde der Memristor M_1 eingebaut, der durch die Gleichung $q_M = Q_0$ beschrieben sei.

*b) Was gilt stets für den Strom i_M an diesem Memristor?

c) Welche Spannung u_M ergibt sich?

*d) Zu welchem resistiven Bauteil ist der Memristor M_1 äquivalent?

Nun werde stattdessen der Memristor M_2 verwendet, für den $q_M = \frac{2}{\pi} Q_0 \arctan\left(\frac{\varphi_M}{\Phi_0}\right)$ gelte.
Für die Erregung werde $u_0(t) = U_0$ angenommen.

*e) Bestimme die Memduktanz $W(\varphi_M)$, die definiert ist als $W(\varphi_M) := \frac{\partial q_M}{\partial \varphi_M}$.

f) Gib i_M als Funktion von φ_M und u_M an. Wie kann dabei $W(\varphi_M)$ interpretiert werden?

g) Stelle eine Differentialgleichung für φ_M auf.

Für bestimmte Werte von Q_0, Φ_0 und R lautet die DGL $\dot{\varphi}_M = \frac{1+(\varphi_M / V\,s)^2}{2+(\varphi_M / V\,s)^2} U_0$.

*h) Welche Spannung $u_M(0)$ ergibt sich, wenn $q_M(0) = 0$ angenommen wird?

*i) Was erhält man für den Grenzwert $\lim\limits_{\varphi_M \to \infty} u_M$?

j) Wie verhält sich der Memristor M_2 also für große Flüsse φ_M? Interpretiere das Ergebnis zusammen mit dem Ergebnis von Aufgabe d).

Der Memristor M_3, der nun eingebaut werde, sei beschrieben durch $q_M = -\frac{Q_0}{\Phi_0} \varphi_M + Q_0 e^{\varphi_M / \Phi_0}$.
Die Erregung sei nun $u_0(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Es gelte $R = \Phi_0 / Q_0$ und $\varphi_M(0) = 0$.

*k) Stelle auch für diesen Fall eine Differentialgleichung für φ_M auf.

l) Zeige, dass die DGL durch die Funktion $\varphi_M = \Phi_0 \ln\left(\frac{U_0}{\Phi_0 \omega} \sin(\omega t) + c\right)$ erfüllt wird.

*m) Bestimme die Konstante c.

n) Welche Spannung $u_M(t)$ ergibt sich für $t = k\pi / \omega$ mit $k \in \mathbb{Z}$? (Fallunterscheidung!) Interpretiere das Ergebnis zusammen mit dem Ergebnis von Aufgabe d).

ST2-TUTORÜBUNG – LÖSUNG ZU ZUSATZBLATT 3

1. *Memristoren mit krummlinigen Kennlinien*

a) $i_M = i_R = \dfrac{u_R}{R} = \dfrac{u_0(t) - u_M}{R}$

b) $i_M = \dot{q}_M = 0$

c) $0 = \dfrac{u_0(t) - u_M}{R} \;\Rightarrow\; u_M = u_0(t)$

d) Zu einem Leerlauf.

e) $W(\varphi_M) = \dfrac{\partial q_M}{\partial \varphi_M} = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{Q_0}{\Phi_0}\dfrac{1}{1+(\varphi_M/\Phi_0)^2}$

f) $i_M = \dot{q}_M = \dfrac{\partial q_M}{\partial \varphi_M}\dot{\varphi}_M = W(\varphi_M)\, u_M = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{Q_0}{\Phi_0}\dfrac{1}{1+(\varphi_M/\Phi_0)^2} u_M$

Die Memduktanz kann als veränderlicher Leitwert interpretiert werden, dessen tatsächlicher Wert vom gerade im Memristor gespeicherten Fluss abhängt.

g) $\dfrac{U_0 - \dot{\varphi}_M}{R} = \dfrac{u_0(t) - u_M}{R} = i_M = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{Q_0}{\Phi_0}\dfrac{1}{1+(\varphi_M/\Phi_0)^2}\dot{\varphi}_M = \dfrac{2}{\pi} Q_0 \dfrac{\Phi_0}{\Phi_0^2 + \varphi_M^2}\dot{\varphi}_M$

$$\Rightarrow\; \dot{\varphi}_M = \frac{U_0/R}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{2}{\pi}\dfrac{Q_0\Phi_0}{\Phi_0^2+\varphi_M^2}} = \frac{\Phi_0^2 + \varphi_M^2}{(2/\pi) R Q_0 \Phi_0 + \Phi_0^2 + \varphi_M^2} U_0$$

h) $\varphi_M(0) = \Phi_0 \tan\left(\dfrac{q_M(0)}{Q_0}\right) = \Phi_0 \tan(0) = 0 \;\Rightarrow\; u_M(0) = \dot{\varphi}_M(0) = \dfrac{1+0}{2+0} U_0 = \dfrac{U_0}{2}$

i) $\lim\limits_{\varphi_M\to\infty} u_M = \lim\limits_{\varphi_M\to\infty} \dot{\varphi}_M = \lim\limits_{\varphi_M\to\infty} \dfrac{\varphi_M^{-2}+1}{2\varphi_M^{-2}+1} U_0 = \dfrac{1}{1} U_0 = U_0$

j) Für große φ_M verhält sich der Memristor M_2 wie ein Leerlauf. Dies liegt daran, dass sich die Arkustangenskurve für große φ_M an die Asymptote $q_M = Q_0$ anschmiegt und der Memristor sich damit genauso verhält wie der Memristor M_1.
Oder mit anderen Worten: Die Memduktanz W (entspricht der Steigung der Kennlinie) geht für große φ_M gegen Null und der Memristor verhält sich somit wie ein Leitwert $G = 0$, also wie ein Leerlauf.

k) $\dfrac{u_0(t) - \dot{\varphi}_M}{R} = \dfrac{u_0(t) - u_M}{R} = i_M = \dot{q}_M = \dfrac{Q_0}{\Phi_0}\left(e^{\varphi_M/\Phi_0} - 1\right)\dot{\varphi}_M$

$$\Rightarrow\; \dot{\varphi}_M = \frac{\dfrac{1}{R} U_0 \cos(\omega t)}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{Q_0}{\Phi_0}\left(e^{\varphi_M/\Phi_0} - 1\right)} = \frac{\dfrac{Q_0}{\Phi_0} U_0 \cos(\omega t)}{\dfrac{Q_0}{\Phi_0}\left(1 + e^{\varphi_M/\Phi_0} - 1\right)} = \frac{U_0 \cos(\omega t)}{e^{\varphi_M/\Phi_0}} = U_0 \cos(\omega t) \cdot e^{-\varphi_M/\Phi_0}$$

l) aus DGL:
$$\dot{\varphi}_M = U_0 \cos(\omega t) e^{-\varphi_M/\Phi_0} = U_0 \cos(\omega t) e^{\left(-\Phi_0 \ln\left(\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega t)+c\right)/\Phi_0\right)} = \frac{U_0 \cos(\omega t)}{\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega t)+c}$$

durch Ableiten: $\dot{\varphi}_M = \frac{\Phi_0}{\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega t)+c}\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\cos(\omega t)\,\omega = \frac{U_0 \cos(\omega t)}{\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega t)+c}$ $\Rightarrow$ DGL erfüllt

m) $0 = \varphi_M(0) = \Phi_0 \ln\left(\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega \cdot 0)+c\right) = \Phi_0 \ln(c) \;\Rightarrow\; c = e^0 = 1$

n)
$$u_M = \dot{\varphi}_M = \frac{U_0 \cos(\omega t)}{\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega t)+1} = \frac{u_0(t)}{\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\sin(\omega t)+1}$$
$$u_M\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) = \frac{u_0(t)}{0+1} = u_0(t) = \begin{cases} U_0 & k=2n \\ -U_0 & k=2n+1 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Der Memristor verhält sich zu den Zeitpunkten $t = k\pi/\omega$ offenbar wie ein Leerlauf.

Es gilt: $\varphi_M\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) = \Phi_0 \ln\left(\frac{U_0}{\Phi_0 \omega}\cdot 0+1\right) = \Phi_0 \ln(1) = 0$

und: $W(0) = \left.\frac{\partial q_M}{\partial \varphi_M}\right|_{\varphi_M=0} = \left.\frac{Q_0}{\Phi_0}\left(e^{\varphi_M/\Phi_0}-1\right)\right|_{\varphi_M=0} = \frac{Q_0}{\Phi_0}(1-1) = 0$

Zu den Zeitpunkten $t = k\pi/\omega$ wird also ein Punkt auf der Kennlinie durchlaufen, an dem die Kennlinie eine waagerechte Tangente hat. Dort gilt (lokal) $q_M = const.$ und der Memristor verhält sich genauso wie der Memristor M_1.

Oder mit anderen Worten: Die Memduktanz $W(\varphi_M(k\pi/\omega))$ ist gleich Null und der Memristor verhält sich zu diesen Zeitpunkten wie ein Leitwert $G=0$, also wie ein Leerlauf.

***Anmerkung**: Der Begriff Memduktanz wurde meines Wissens nach nicht in Vorlesung und Übung behandelt. In der Tat ließen sich meine beiden Memristorblätter auch ohne diesen Begriff formulieren. Ich verwende ihn aber dennoch, weil er ein sehr passender Name für die Steigung der Memristorkennlinie ist. Schließlich setzt sich Memduktanz aus den englischen Worten Memory und Conductance zusammen und genau das ist es, was durch die Steigung der Memristorkennlinie beschrieben wird: Der „Leitwert“ (conductance) des Memristors in einem bestimmten* (φ, q)*-Arbeitspunkt, wobei der Arbeitspunkt von der „Erinnerung“ (memory), also der Vorgeschichte, abhängt. Entsprechend bezeichnet man den Kehrwert der Steigung als Memristanz* M, *von den englischen Worten Memory und Resistance (Widerstandswert). Der Memristor ist, wie man sieht, nichts weiter als ein veränderlicher Leitwert/Widerstand, dessen tatsächlicher Wert vom gespeicherten Fluss oder von der gespeicherten Ladung (je nach, welches die steuernde Größe ist) abhängt und damit von der vorangegangenen Spannung bzw. vom vorangegangenen Strom.*